欽定大清會典圖

欽定大清會典圖卷一百三十四

天文二十八 算術二

八綫圖一

八綫圖二

八綫表

借弧求正餘弦圖

借弦求弧圖

平三角圖一

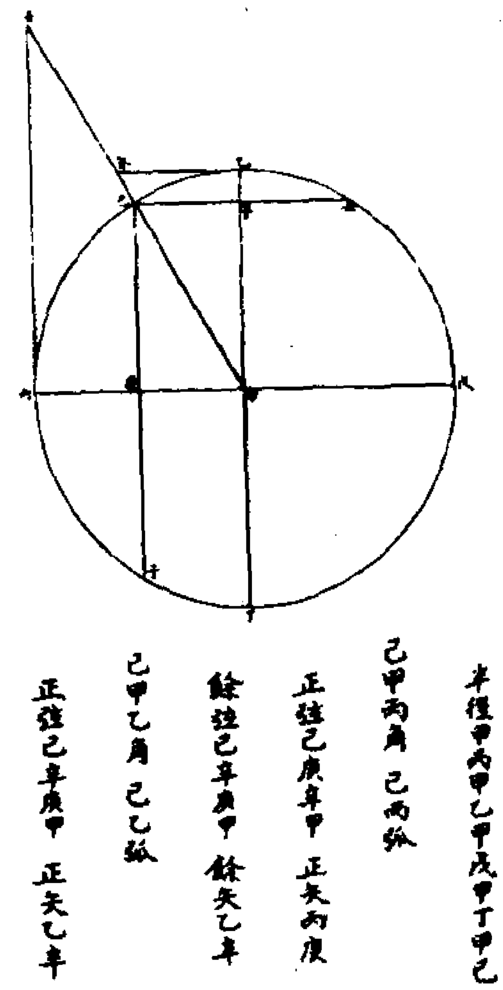
平三角圖二

平三角圖三

平三角圖四
平三角圖五
垂綫圖
圜徑圖一
圜徑圖二
圜徑圖三
方邊圖
分角綫圖一
分角綫圖二
分邊綫圖一

分邊綫圖二

八綫圖一



半徑甲丙甲乙甲戊甲丁甲己

己甲丙角　己丙弧

正弦己庚辛甲　正矢丙庚　正切壬丙　正割壬甲

餘弦己辛庚甲　餘矢乙辛　餘切癸乙　餘割癸甲

己甲乙角　己乙弧

正弦己辛庚甲　正矢乙辛　正切癸乙　正割癸甲

餘弦己庚辛甲　餘矢丙庚　餘切壬丙　餘割壬甲

圓中過心之直綫為徑。如乙丁。如丙戊。皆全徑也。圓心適當其中如甲。自甲至周。如甲乙。甲丙。甲丁。甲戊。皆為半徑。徑為直綫。圓周為弧綫。弧綫與直綫之比例不通。徑一周三。以大數言也。尚有零數不盡。徑一則周三有餘。周三則徑一不足。周徑二者。不能皆為有盡之數。因用割圓之法。內弦外切。屢求句股。為無數多邊形。使弧綫直綫漸合為一。而圓周始得。徑一〇〇〇〇〇〇〇 則周為三一四一五九二六五三有餘。周一〇〇〇〇〇〇〇

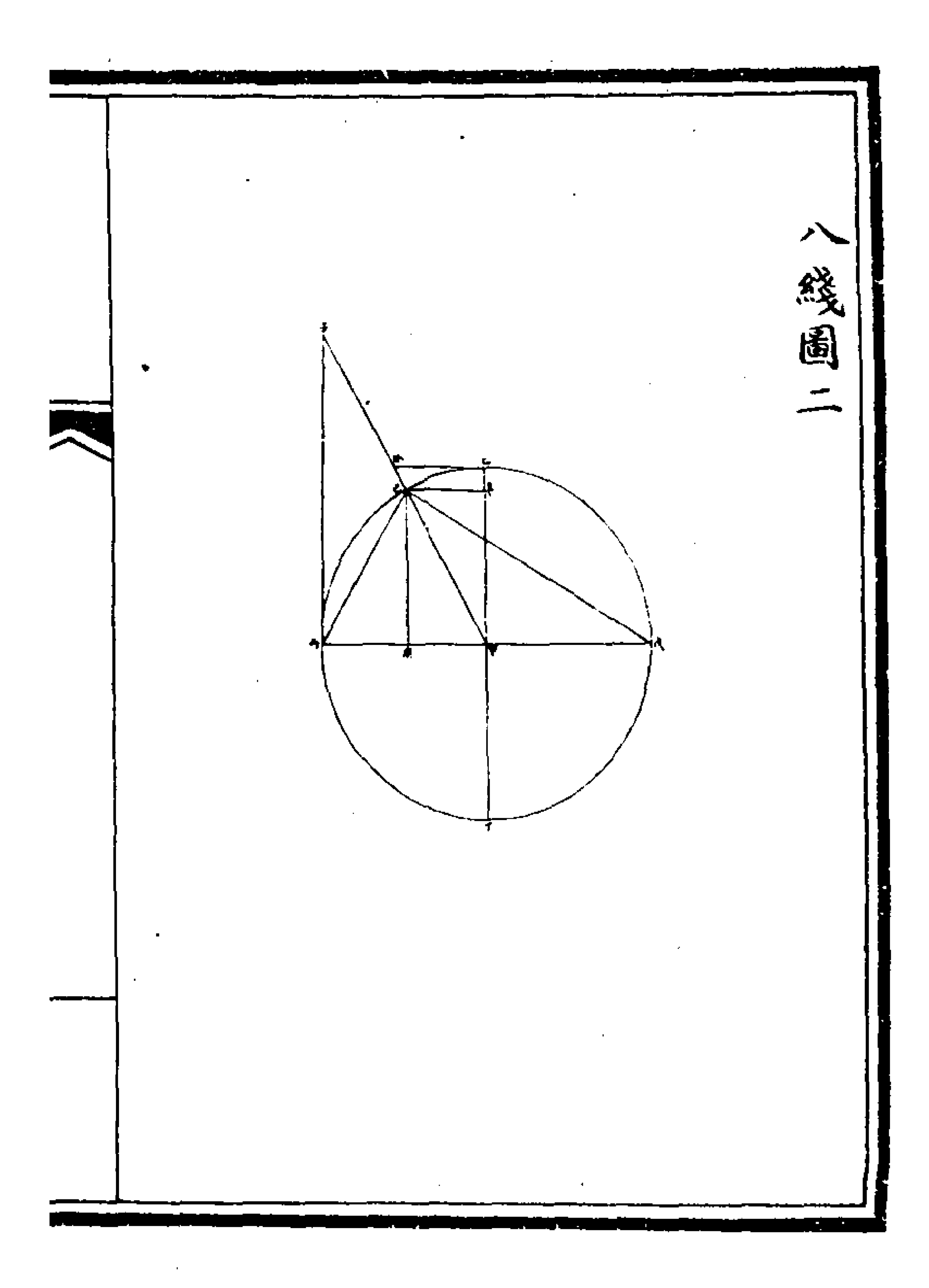
○○則徑為三一八三○九八八六有餘。此周徑定率也。而弧綫直綫不可比例。則用八綫馭之。仍以直綫與直綫為比。而周度可得。命圓周為三百六十度。如丙乙戊丁。每度六十分。每分六十秒。微。纖。忽。芒。塵。皆以六十遞析。命全徑為二千萬。如丙戊。如乙丁。半徑為一千萬。如甲丙。如甲乙。如甲戊。如甲丁。圓周四分之一。皆九十度。如丙乙弧。乙戊弧。戊丁弧。丁丙弧。皆為一象限。於一象限中任取一處如己。截一弧為兩弧。如己丙弧為六十度。己乙弧為三十度。則每弧

皆有八綫。己甲仍為半徑。與甲乙甲丙等也。己丙弧。為己甲丙角之度。己乙弧。為己甲乙角之度。其八綫在弧內與半徑平行者為弦。如己庚如己辛。切弧外與弦平行者為切。如壬丙。如癸乙。弦截半徑之餘為矢。如丙庚。如乙辛。自圜心割圜周而與切綫遇者為割。如壬甲。如癸甲在己甲丙角。則其弧己丙。其正弦己庚。正矢丙庚。正切壬丙。正割壬甲。而以己甲乙角。己乙弧。為餘角餘弧。餘弦己辛。餘矢乙辛。餘切癸乙。餘割癸甲。若在己甲乙角。則其弧己乙。其正弦己辛。

正矢乙辛。正切癸乙。正割癸甲。而以己甲丙角己丙弧為餘角餘弧。餘弦己庚。餘矢丙庚。餘切壬丙。餘割壬甲。此為正則彼為餘。彼為正則此為餘也。正矢即餘弦之餘。餘矢即正弦之餘。如甲丙半徑內。庚甲即餘弦。其餘丙庚為正矢也。乙甲半徑內。辛甲即正弦。其餘乙辛為餘矢也。餘弦加半徑為大矢。如庚戊為戊己一百二十度弧之大矢。辛丁為丁己一百五十度弧之大矢。正弦之倍為通弦。如己子為己丙子一百二十度弧之通弦。己丑為己乙丑六十度弧之通

弦也。鈍角之弧過象限。即以外角八綫為其八
綫。如戊甲己鈍角。其弧戊乙己一百二十度。以
減半周戊乙丙。餘丙己弧六十度。即為外角己
甲丙角之弧。己甲丙角八綫。與戊甲己鈍角同
用。惟矢。則以戊庚為大矢。直角九十度。如丙甲
乙角。其弧丙乙。適足一象限。則半徑乙甲。即其
正弦。半徑丙甲。即其正矢。而其餘諸綫俱無也。
八綫皆成同式句股形。正弦己庚為股。餘弦庚
甲為句。半徑己甲為弦。正切壬丙為股。半徑丙
甲為句。正割壬甲為弦。半徑乙甲為股。餘切癸

乙為句。餘割癸甲為弦。皆為同式。故正餘弦可以句股法相求。弦切割可以比例相求。以餘弦庚甲為一率。正弦己庚為二率。半徑丙甲為三率。則得四率正切壬丙。以正弦辛甲為一率。餘弦己辛為二率。半徑乙甲為三率。則得四率餘切癸乙。以餘弦庚甲為一率。半徑丙甲為二率。半徑己甲為三率。則得四率正割壬甲。正弦辛甲為一率。半徑乙甲為二率。半徑己甲為三率。則得四率餘割癸甲。此二三率皆為半徑。即三率比例也。



八綫圖二

如圖。丙己通弦為句。己戊通弦為股。丙戊全徑為弦。己庚正弦為其中垂綫。與戊庚大矢。丙庚正矢為連比例三率。己庚為中率。戊庚及丙庚為首末率。中率己庚正弦自乘。戊庚大矢除之。則得丙庚正矢。若丙庚正矢除之。則得戊庚大矢。首末率相乘開平方。則得中率己庚正弦。故弦矢可相求也。又八綫可以相代為用。如命半徑為一千萬。用半徑乘除者其數不變。乘則升七位。除則降七位而已。而除難於乘。則可易除為乘而用相代法。正弦與餘割

相代。如一率正弦辛甲股。二率半徑乙甲大股。三率餘弦己辛句。四率餘切癸乙大句。可以半徑己甲弦為一率。餘割癸甲大弦為二率。以比己辛句癸乙大句。此易一二率之同式股為同式弦也。如一率餘割癸甲弦。二率半徑己甲小弦。三率餘切癸乙句。四率餘弦己辛小句。可以半徑乙甲股為一率。正弦辛甲小股為二率。以比癸乙句己辛小句。此易一二率之同式弦為同式股也。餘弦與正割相代。如一率餘弦庚甲句。二率半徑丙甲大句。三率正弦己庚股。四率

正切壬丙大股。可以半徑己甲弦為一率。正割壬甲大弦為二率。以比己庚股壬丙大股。此易一二率之同式句為同式弦也。如一率正割壬甲弦。二率半徑己甲小弦。三率正切壬丙股。四率正弦己庚小股。可以半徑丙甲句為一率。餘弦庚甲小句為二率。以比壬丙股己庚小股。此易一二率之同式弦為同式句也。正切與餘切相代。如一率正切壬丙股。二率半徑丙甲句。三率正弦辛甲小股。四率餘弦己辛小句。可以半徑乙甲股為一率。餘切癸乙句為二率。以比己

庚小股己辛小句又如一率餘切癸乙句二率半徑乙甲股三率餘弦己辛小句四率正弦辛甲小股可以半徑丙甲句為一率正切壬丙股為二率以比己辛小句辛甲小股此一二率皆以同式句股易同式句股也一象限中逐度分秒皆有八綫求之之法用六宗三要二簡諸法屢次遞求得每度每分每十秒之正弦以求各餘弦正切餘切正割餘割之數以列表為八綫表一象限九十度取其半四十五度列之四十五度以後即將四十五度以前逆數而得凡六

葉一度。每葉縱分六格。一正弦。二正切。三正割。四餘弦。五餘切。六餘割。正餘弦切割之名標於上。四十五度後逆數者。正為餘。餘為正。標其名於下。每格皆橫分十層。每層為一分。每一層中又分六層。每層為十秒。其度分秒標於左右。自初度至四十四度。列於右方之上。其分秒順列右行。由上而下。自四十五度至八十九度。列於左方之下。其分秒逆列左行。由下而上。其每綫之數。則於每格每層中由左而右橫列之。檢表之法。有度分秒查綫者。視對度分秒某層之綫。

有綫查度分秒者視對綫某層之度分秒其所列者越十秒而一綫若查十秒中之零秒則用中比例如檢一度三分一十三秒之正弦則以一度三分一十秒與一度三分二十秒相減餘十秒為一率一度三分一十秒之正弦與一度三分二十秒之正弦相減餘為二率三秒為三率得四率以加一度三分一十秒之正弦即為一度三分一十三秒之正弦表中不列正餘矢者正矢餘矢可以正餘弦減半徑而得半徑減餘弦得正矢減正弦得餘矢則數已寓也全表

四十五度之正餘弦切割。各一萬六千二百綫。計凡九萬七千二百綫。茲不備列。舉每度之正餘弦切割爲一表。以見其概。

八綫表

度	正弦	正切	正割
初			一〇〇〇〇〇〇〇
一	一七四五二四	一七四五五一	一〇〇〇一五二三
二	三四八九九五	三四九二 八	一〇〇〇六〇九五
三	五二三三六〇	五二四〇七八	一〇〇一三七二三
四	六九七五六五	六九九二六八	一〇〇二四四一九
五	八七一五五七	八七四八八七	一〇〇三八一九八
六	一〇四五二八五	一〇五一〇四二	一〇〇五五〇八二
七	一二一八六九三	一二二七八四六	一〇〇七五〇九九
八	一三九一七三一	一四〇五四〇八	一〇〇九八二七六
九	一五六四三四五	一五八三八四四	一〇一二四六五一
一〇	一七三六四八二	一七六三二七〇	一〇一五四二六七
一一	一九〇八〇九〇	一九四三八〇三	一〇一八七一六八
一二	二〇七九一一七	二一二五五六五	一〇二二三四〇七
一三	二二四九五一一	二三〇八六八二	一〇二六三〇三九
一四	二四一九二一九	二四九三二八〇	一〇三〇六一三五
一五	二五八八一九〇	二六七九四九二	一〇三五二七六二
一六	二七五六三七四	二八六七四五四	一〇四〇二九九四
一七	二九二三七一七	三〇五七三〇七	一〇四五六九一八
一八	三〇九〇一七〇	三二四九一九七	一〇五一四六二二
一九	三二五五六八七	三四四三二七六	一〇五七六二〇七
二〇	三四二〇二〇一	三六三九七〇二	一〇六四一七七八
二一	三五八三六七九	三八三八六四〇	一〇七一一四五〇
二二	三七四六〇六六	四〇四〇二六二	一〇七八五三四七
二三	三九〇七三一一	四二四四七四九	一〇八六三六〇四
二四	四〇六七三六六	四四五二二八七	一〇九四六三六三
二五	四二二六一八三	四六六三〇七七	一一〇三三七七九
二六	四三八三七一一	四八七七三二六	一一一二六〇一九
二七	四五三九九〇五	五〇九五二五四	一一二二三二六二
二八	四六九四七一六	五三一七〇九四	一一三二五七〇一
二九	四八四八〇九六	五五四三〇九〇	一一四三三五四一
三〇	五〇〇〇〇〇〇	五七七三五〇三	一一五四七〇〇五
三一	五一五〇三八一	六〇〇八六〇六	一一六六六三三四
三二	五二九九一九三	六二四八六九四	一一七九一七八四
三三	五四四六三九〇	六四九四〇七六	一一九二三六三三
三四	五五九一九二九	六七四五〇八五	一二〇六二一八〇
三五	五七三五七六四	七〇〇二〇七五	一二二〇七七四六
三六	五八七七八五三	七二六五四二六	一二三六〇六八〇
三七	六〇一八一五〇	七五三五五四〇	一二五二一三五七
三八	六一五六六一五	七八一二八五六	一二六九〇一八六
三九	六二九三二〇四	八〇九七八四〇	一二八六七五九六
四〇	六四二七八七六	八三九〇九九六	一三〇五四〇七三
四一	六五六〇五九〇	八六九二八六八	一三二五〇一三〇
四二	六六九一三〇六	九〇〇四〇四一	一三四五六三二七
四三	六八一九九八四	九三二五一五一	一三六七三二七五
四四	六九四六五八四	九六五六八八八	一三九〇一六三六
四五	七〇七一〇六八	一〇〇〇〇〇〇〇	一四一四二一三六
	餘弦	餘切	餘割

度	餘割	餘切	餘弦
九〇			一〇〇〇〇〇〇〇
八九	五七二九八七〇九九	五七二八九九八三〇	九九九八四七七
八八	二八六五三七〇四九	二八六三六二四九八	九九九三九〇八
八七	一九一〇七三〇六〇	一九〇八一一二〇一	九九八六二九五
八六	一四三三五五八一〇	一四三〇〇六六〇二	九九七五六四〇
八五	一一四七三七一八八	一一四三〇〇五七九	九九六一九四七
八四	九五六六七七二二	九五一四三六四五	九九四五二一八
八三	八二〇五五〇九〇	八一四四三四六四	九九二五四六二
八二	七一八五二九六五	七一一五三六九七	九九〇二六八〇
八一	六三九二四五三二	六三一三七五一五	九八七六八八三
八〇	五七五八七七〇五	五六七一二八一八	九八四八〇七七
七九	五二四〇八四三一	五一四四五五四〇	九八一六二七一
七八	四八〇九七三四三	四七〇四六三〇一	九七八一四七六
七七	四四四五四一一五	四三三一四七五九	九七四三七〇一
七六	四一三三五六五五	四〇一〇七八〇九	九七〇二九五七
七五	三八六三七〇三三	三七三二〇五〇八	九六五九二五八
七四	三六二七九五五三	三四八七四一四四	九六一二六一七
七三	三四二〇三〇三六	三二七〇八五二六	九五六三〇四八
七二	三二三六〇六八〇	三〇七七六八三五	九五一〇五六五
七一	三〇七一五五三五	二九〇四二一〇九	九四五五一八六
七〇	二九二三八〇四四	二七四七四七七四	九三九六九二六
六九	二七九〇四二八一	二六〇五〇八九一	九三三五八〇四
六八	二六六九四六七二	二四七五〇八六九	九二七一八三九
六七	二五五九三〇四七	二三五五八五二四	九二〇五〇四九
六六	二四五八五九三三	二二四六〇三六八	九一三五四五五
六五	二三六六二〇一六	二一四四五〇六九	九〇六三〇七八
六四	二二八一一七二〇	二〇五〇三〇三八	八九八七九四〇
六三	二二〇二六八九三	一九六二六一〇五	八九一〇〇六五
六二	二一三〇〇五四五	一八八〇七二六五	八八二九四七六
六一	二〇六二六六五三	一八〇四〇四七八	八七四六一九七
六〇	二〇〇〇〇〇〇〇	一七三二〇五〇八	八六六〇二五四
五九	一九四一六〇四〇	一六六四二七九五	八五七一六七三
五八	一八八七〇七九九	一六〇〇三三四五	八四八〇四八一
五七	一八三六〇七八四	一五三九八六五〇	八三八六七〇六
五六	一七八八二九一六	一四八二五六一〇	八二九〇三七六
五五	一七四三四四六八	一四二八一四八〇	八一九一五二〇
五四	一七〇一三〇一六	一三七六三八一九	八〇九〇一七〇
五三	一六六一六四〇一	一三二七〇四四八	七九八六三五五
五二	一六二四二六九二	一二七九九四一六	七八八〇一〇八
五一	一五八九〇一五七	一二三四八九七二	七七七一四六〇
五〇	一五五五七二三八	一一九一七五三六	七六六〇四四四
四九	一五二四二五三一	一一五〇三六八四	七五四七〇九六
四八	一四九四四七六五	一一一〇六一二五	七四三一四四八
四七	一四六六二七九二	一〇七二三六八七	七三一三五三七
四六	一四三九五五六五	一〇三五五三〇三	七一九三三九八
四五	一四一四二一三六	一〇〇〇〇〇〇〇	七〇七一〇六八
	正割	正切	正弦

此以一千萬為半徑者也。如用一百萬為半徑。則諸綫皆截尾一位。用一十萬為半徑。則諸綫皆截尾二位。半徑減正餘弦而得餘矢正矢。當於尾位減一數。以彼此尚有零數故也。凡檢表。必列全表而檢之。以表中八綫不可以一時求也。而有求八綫之捷法。任舉一弧。可以求弦矢。任舉一弦一矢。可以求弧。法以弧度分秒化作本數用之。以全徑二千億取數當於尾後多取四位以備截零。故以二千億為全徑。之半周一百八十度弧本數三一四一五九二六五三五八。用十八除

之。為十度弧本數一七四五三二九二五一九。又十除之。為一度弧本數一七四五三二九二五一。又六除之。為十分弧本數二九〇八八八二〇八。又十除之。為一分弧本數二九〇八八八八二〇。又六除之。為十秒弧本數四八四八一三六。此十秒弧本數。截尾四位為四八四。而表中十秒正弦反為四八五者。表中因尾下之小餘八而進一於尾位為五者也。試觀表中自十秒至十一分十秒之正弦。皆與正切同數。別內弦外切已合為一。而與弧本數同矣。是即可以遞因而求正弦。試以十秒正弦四八五。用二因之為二十秒正弦九七〇。用三因之為三十秒正弦則一四五五。用四因之為四十秒正弦則一九四〇。是皆過於表中正弦一四五四及一九三九之數。若以四十秒正弦一九三九

折半為二十秒正弦。當是九六九。又折半為一十秒正弦。當是四八四。是正與弧本數合。可知表中一十秒二十秒之正弦。皆於尾位進一有也 又十除之。為一秒弧本數四八四八一三。所設弧若干度分秒。各取其數。相因相加。為弧本數。

弧求正弦。以弧本數為第一條。以半徑為連比例第一率。弧本數為第二率。二率自乘。一率除之。得第三率。以第一條三率乘之。一率除之。得第四率。二除之。三除之。為第二條。以第二條三率乘之。一率除之。得第六率。四除之。五除之。為第三條。以第三條三率乘之。一率除之。得第八

率。六除之。七除之。為第四條。以後例推除至單位下而止。第一條第三條相併。第二條第四條相併。兩數相減。餘即正弦。

弧求正矢。以半徑為連比例第一率。弧本數為第二率。二率自乘。一率除之。得第三率。二除之。為第一條。以第一條三率乘之。一率除之。得第五率。三除之。四除之。為第二條。以第二條三率乘之。一率除之。得第七率。五除之。六除之。為第三條。以第三條三率乘之。一率除之。得第九率。七除之。八除之。為第四條。以後例推除至單位

下而止。第一條第三條相併。第二條第四條相併。兩數相減。餘即正矢。

正弦求弧。以正弦為第一條。以半徑為連比例第一率。正弦為第二率。二率自乘。一率除之。得第三率。以第一條三率乘之。一率除之。得第四率。二除之。三除之。為第二條。以第二條三率乘之。一率除之。得第六率。九乘之。四除之。五除之。為第三條。以第三條三率乘之。一率除之。得第八率。二十五乘之。六除之。七除之。為第四條。以第四條三率乘之。一率除之。得第十率。四十九

乘之。八除之。九除之。為第五條。以第五條三率乘之。二率除之。得第十二率。八十一乘之。十除之。十一除之。為第六條。以後倣推。除至單位下而止。以諸條相併。即弧本數。以每度分秒之本數收之。得度分秒。

正矢求弧。以正矢倍之為第一條。以半徑為連比例第一率。倍正矢為第三率。三率自乘。一率除之。得第五率。三除之。四除之。為第二條。以第二條四乘之。三率乘之。一率除之。得第七率。五除之。六除之。為第三條。以第三條九乘之。三率

乘之。一率除之。得第九率。七除之。八除之。為第

四條。以第四條十六乘之。三率乘之。一率除之。

得第十一率。九除之。十除之。為第五條。以第五

條二十五乘之。三率乘之。一率除之。得第十三

率。十一除之。十二除之。為第六條。以後倒推除

至單位下而止。以諸條相併。又為連比例第三

率。以與第一率半徑相乘開平方得第二率。即

弧本數。

通弧求通弦法。如弧求正弦。通弧求矢法。如弧

求正矢。通弦求通弧法。如正弦求弧。皆以連比

例第三率四除之。以為每次所用之第三率。

正矢求通弧。以正矢八乘之為第一條。以半徑為連比例第一率。八乘正矢為第三率。四除之。以為每次所用之第三率。餘與正矢求弧之法同。

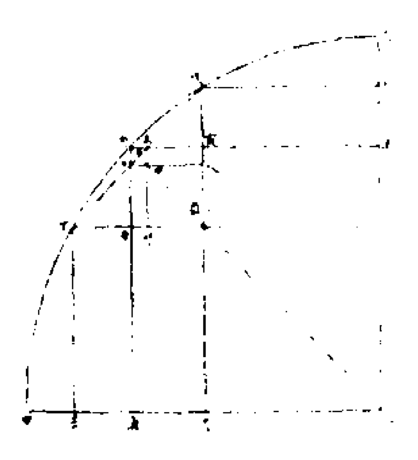
圓徑求周。以全徑（半徑即六十度弧之通弦。全徑為六十度弧通弦者二也。）三因之。（為六十度弧通弦者六）為第一條。以第一條四除之。又二除之。三除之。為第二條。以第二條九乘之。四除之。又四除之。五除之。為第三條。以第三條二十五乘之。四除之。又六除之。七除之。為第

四條以第四條四十九乘之四除之又八除之九除之為第五條以第五條八十一乘之四除之又十除之十一除之為第六條以後例推除至單位下而止若以一千萬為全徑則至十一條併十一條數得三一四一五九二六即圓周此合六通弦以求六通弧也其不用連比例者六十度通弦與半徑等則每率皆等無庸比例也每條多一四除之者既不用連比例則第三率之用四除以為每次第三率者分用於每條中也蓋求通弦通弧之於第三率先用四除原

即每條各用之四除總用之於第三率也。

以上諸法。無論弧之大小。按法求之。皆得真數。若弧過六十度者。可以餘弧求得餘弦。乃用句股法求得正弦。若弧在三十度以外至六十度者。求之條數漸多。尚苦其繁。則又有借弧借弦之法。

借弧求正餘弦圖



視本弧過三十度至六十度內者借四十五度弧如甲丙與本弧甲丁或甲戊相減餘為較弧如丁丙或丙戊較弧祇在十五度內如法求得較弧正弦如丁戌如戊戌皆即酉戌正矢如丙戌乃以半徑丙己為一率借弧弦如丙庚或丙辛為二率較弧弦矢相加如丙酉或相減如申酉為三率得四率為弦較如丙丑如丙寅或如申卯如甲辰與卯酉丁丑辰酉戌寅俱等以丙丑與借弧弦相減如丁壬同戊癸以申卯即戊寅與借弧弦相加如

戊亥同丁子即皆得本弧之正餘弦所用三率

本弧小於借弧求正弦則加成丙酉求餘弦則

減餘申酉本弧大於借弧求正弦則減餘申酉

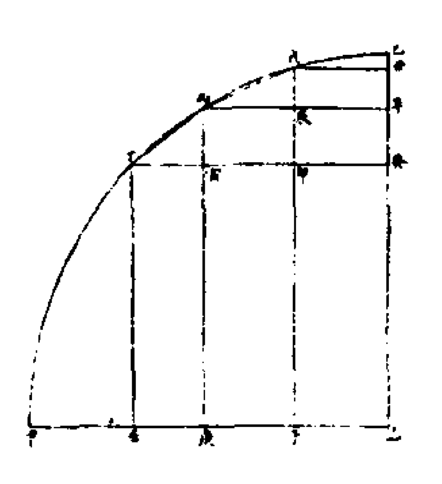
求餘弦則加成丙酉所得四率本弧小於借弧

求正弦則減餘丑庚求餘弦則加成丁子本弧

大於借弧求正弦則加成戊亥求餘弦則減餘

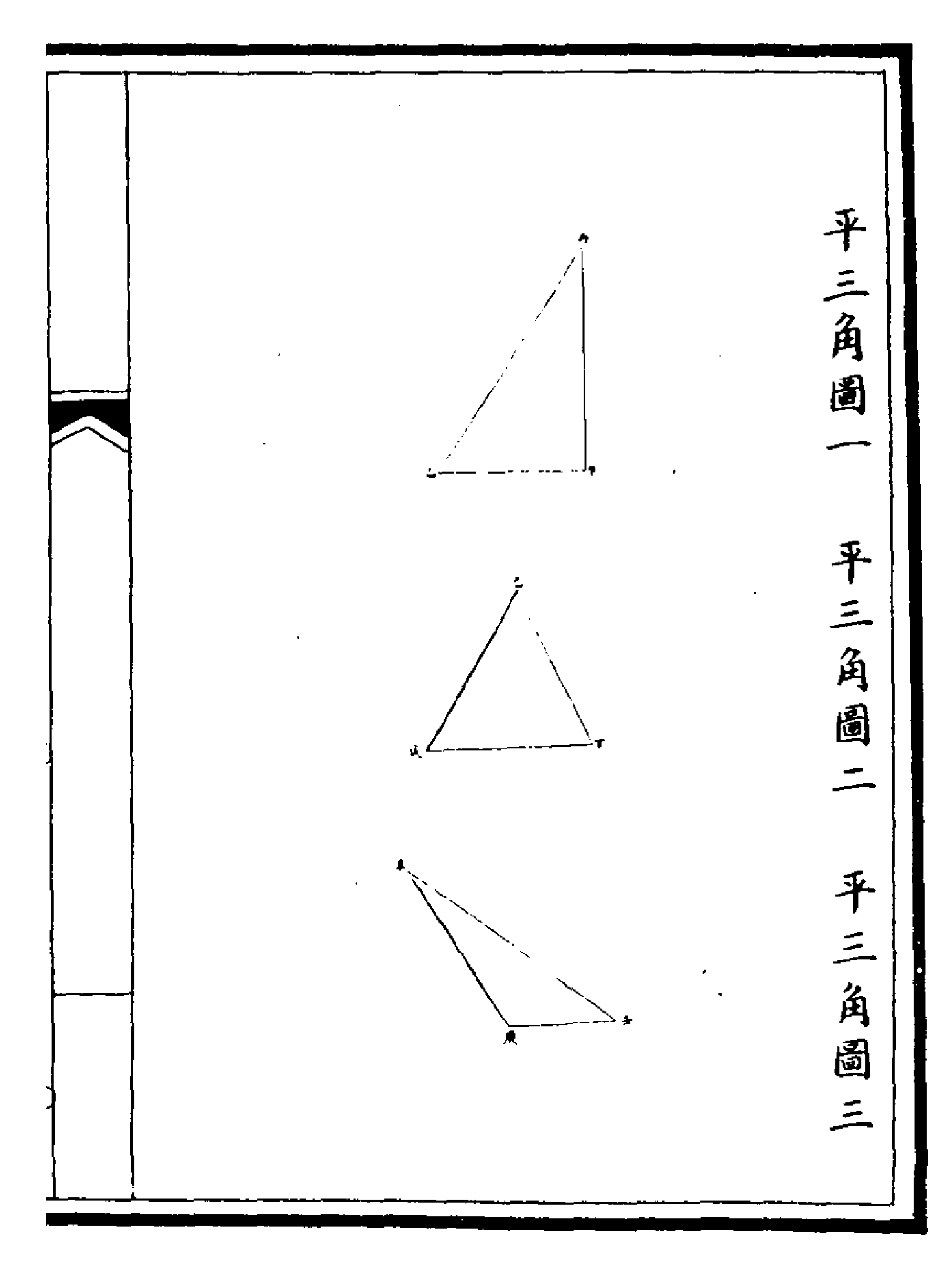
寅辛

借弦求弧圖



如圖。正弦若過半徑十分之三至十分之六。借三十度正弦五〇〇〇〇〇〇餘弦八六六〇二五四用之。若過半徑十分之六至十分之八。借四十五度正弦餘弦皆七〇七一〇六八用之。若過半徑十分之八至十分之九。借六十度正弦八六六〇二五四餘弦五〇〇〇〇〇〇用之。先以本弧正弦求得本弧餘弦。次以本弧正弦與借弧正弦相減。餘為正弦較。如丙寅或戊辰。皆為股。以本弧餘弦與借弧餘弦相減。餘為餘弦較。如寅丁或辰丙。皆

為句。求得弦。如丙丁或丙戊。為較弧通弦。如法求得較弧。如丙丁弧。或丙戊弧。與借弧相加減。得本弧。本弧正弦。大於借弧正弦。則兩弧相加。本弧正弦。小於借弧正弦。則兩弧相減。

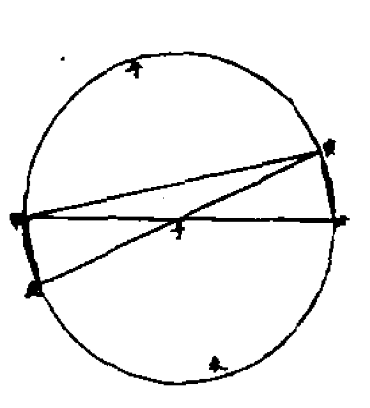

平三角圖一
平三角圖二
平三角圖三

平面之三角形為平三角。三角三邊相對三邊皆直綫。三角皆以弧度計。凡角適足九十度者為直角。不及九十度者為鋭角。過於九十度者為鈍角。有直角三角形。如第一圖。丙甲乙即句股形。甲為直角九十度。乙丙二角俱不及九十度為鋭角。有鋭角三角形。如第二圖。丁戊已形。三角俱不及九十度為鋭角。有鈍角三角形。如第三圖。壬庚辛形。庚角過於九十度為鈍角。其餘辛角壬角皆不及九十度為鋭角。凡角以三字命之者皆以中一

字為主○如稱丙甲乙角。則以甲直角為主○稱丁
戊己角。則以戊銳角為主○稱壬庚辛角。則以庚
鈍角為主○

平三角圖四

平三角圖五

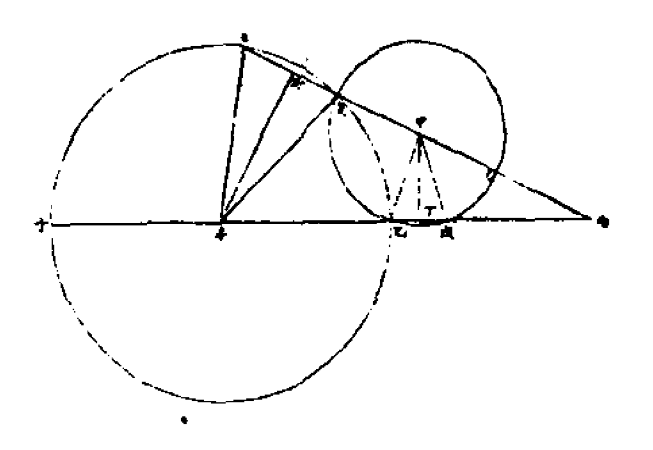


凡角立於圜心如甲。則所當之圜周為其弧。如第四圖。丙乙弧九十度即甲直角之弧。若立於圜界如丁則其弧必倍於心角。如巳丙乙戊弧。丁角與甲角同大。而巳丙乙戊弧。則為一百八十度。倍於丙乙九十度矣。故角必立於圜心。其弧乃為真度。凡角有交角。即對角。有外角即並角。如第五圖。於卯丑綫作辰寅交綫則成銳鈍四角。寅子丑卯子辰。兩銳角相對是為交角。子銳角與子銳角之度必相等也。寅子卯。丑子辰。兩鈍角相對。是為交

角。子鈍角與子鈍角之度必相等也。若二角並立於一綫之上。則一為本角。一為外角。寅子丑銳角。與寅子卯鈍角。二角相並。同立於卯丑綫。則寅子丑角。為寅子卯角之外角。寅子卯角。為寅子丑角之外角。凡平三角。無論銳鈍。三角相併。皆一百八十度。如寅子丑銳角形。子為心角。其度為寅丑弧。寅為界角。其度為丑辰弧之半丑未弧。丑為界角。其度為寅卯弧之半寅午弧。丑辰弧與寅卯弧等。則寅卯弧之半午卯弧。亦必與丑未弧等。即為寅角度。合寅丑二角之度。

即寅午卯弧。併子角度寅丑弧。共為丑卯半周一百八十度。寅午卯弧。即子外角之度也。子鈍角與子鋭角相併。亦為半周一百八十度。故凡平三角。有一角。則其外角即為餘二角之共度。若知二角。則併二角度以減半周一百八十度。餘即又一角度也。

垂綫圖

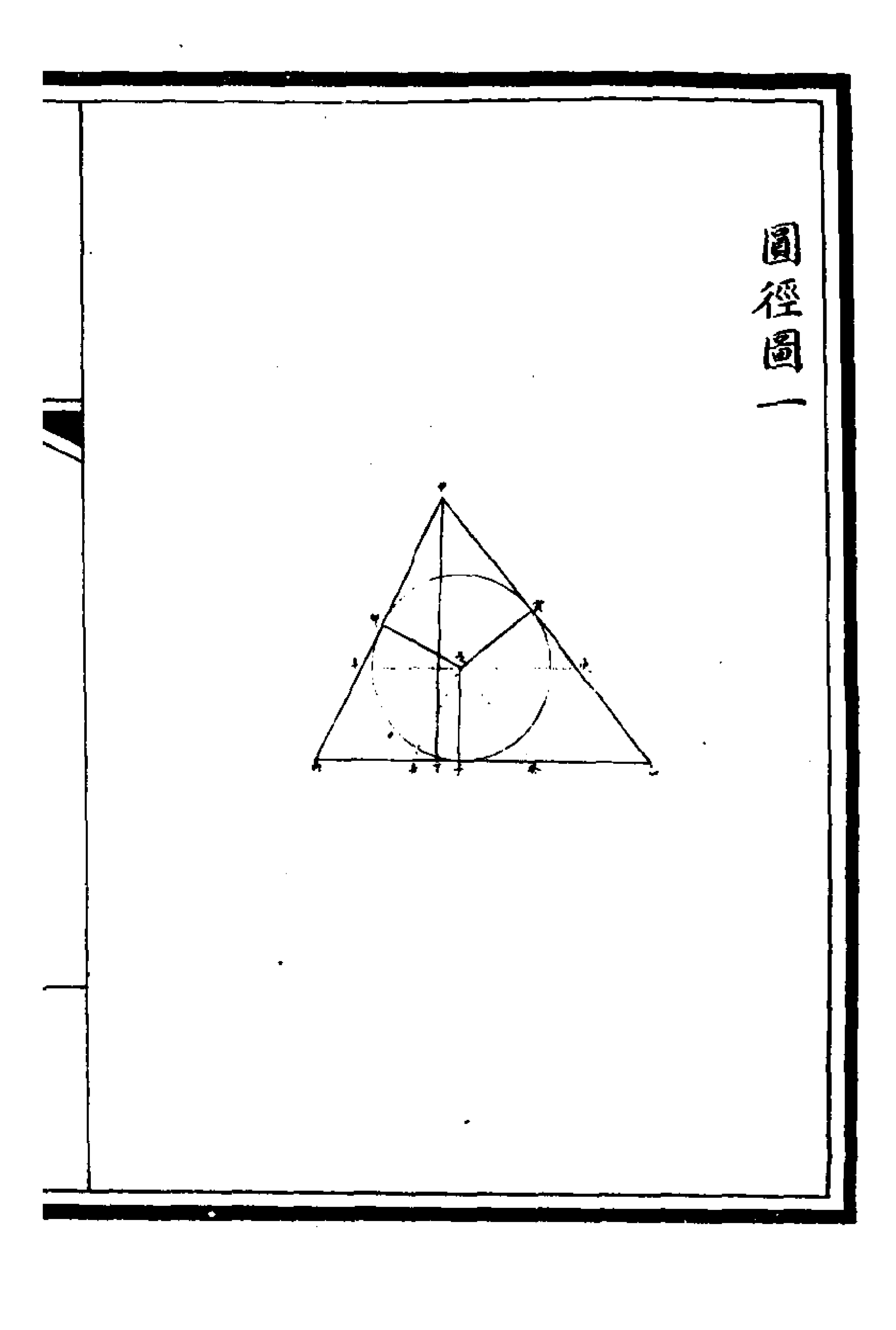


三角形之垂線。銳角形。則為中垂線。鈍角形。則為外垂線。如甲乙丙銳角形。則甲丁垂線垂於形內。甲戊丙鈍角形。則甲丁垂線垂於形外。求之者皆以對甲角之邊為底。甲角旁兩邊為兩腰。垂線所截之底為分底。如丁丙。如丁乙。銳角形求中垂線。以底乙丙為分底和為一率。兩腰和甲丙及甲乙即丙庚為二率。兩腰較丙己為三率。求得四率為分底較丙戊。以減全底乙丙餘戊乙。半之為分底丁乙。以為句。小腰甲乙為弦。求得股甲丁。即中垂線。鈍角

形求外垂綫。以底丙戊為分底較。為一率。兩腰較丙己。為二率。兩腰和甲丙及甲戊。即丙庚。為三率。求得四率。為分底和乙丙內減底丙戊。餘戊乙。半之。丁戊以為句。小腰甲戊為弦。求得股甲丁。即外垂綫。此所用四率。以底比腰。同於以腰比底。似為轉比例。其實仍為相當比例。試引丙乙綫至辛。引丙甲綫至壬。作壬辛綫。又作辛庚辛癸二綫。則辛壬丙銳角形。與甲乙丙銳角形同式。辛庚丙鈍角形。與甲戊丙鈍角形同式。大三角形丙壬為分底和。丙辛及辛壬為兩腰

和。即丙子。原三角形之分底和乙丙。即大三角形之兩腰較也。原三角形之兩腰和丙庚。即大三角形之分底較也。是銳角形之以丙乙丙庚比丙己丙戊。仍為以大較比小較也。鈍角形之以丙戊丙己比丙庚丙乙。仍為以小較比大較也。則仍相當比例也。

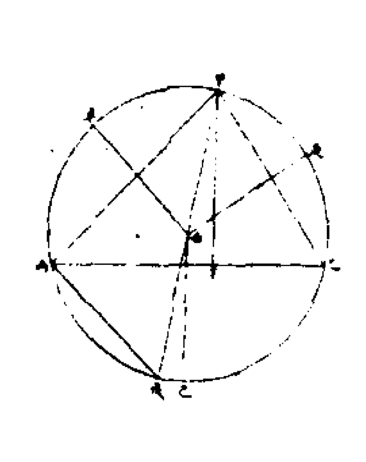
圓徑圖一



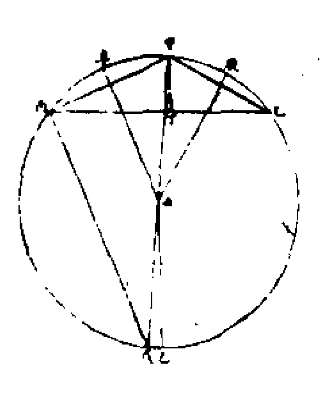
甲乙丙鋭角三角形。戊為圓心。戊卯戊子戊寅。皆為内容圓之半徑。先以兩腰甲乙甲丙。底邊乙丙。求得中垂綫甲丁。乃以甲乙甲丙乙丙三邊相加。為一率。中垂綫甲丁為二率。底邊乙丙為三率。求得四率。内容圓半徑戊子。倍之。即得内容圓徑。試與乙丙平行作庚辛過心綫。又自戊與兩腰平行作戊癸戊壬二綫。則戊壬等壬丙。戊癸等癸乙。戊癸壬形之三邊和。等於底邊乙丙。用戊癸壬。甲乙丙。同式三角形。以甲乙丙形之三邊和。與甲丁之比。

同於戊癸壬形之三邊和。即底邊乙丙與戊子之比。而得內容圓半徑戊子。倍之。即圓徑也。求鈍角形內容圓。法與此同。

圜徑圖二



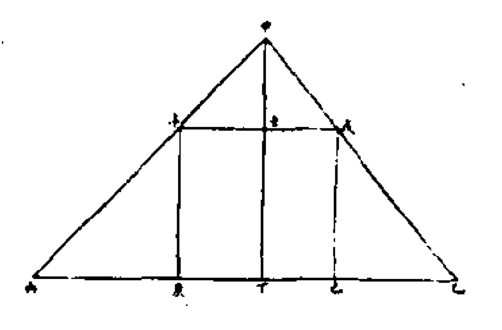
圜徑圖三



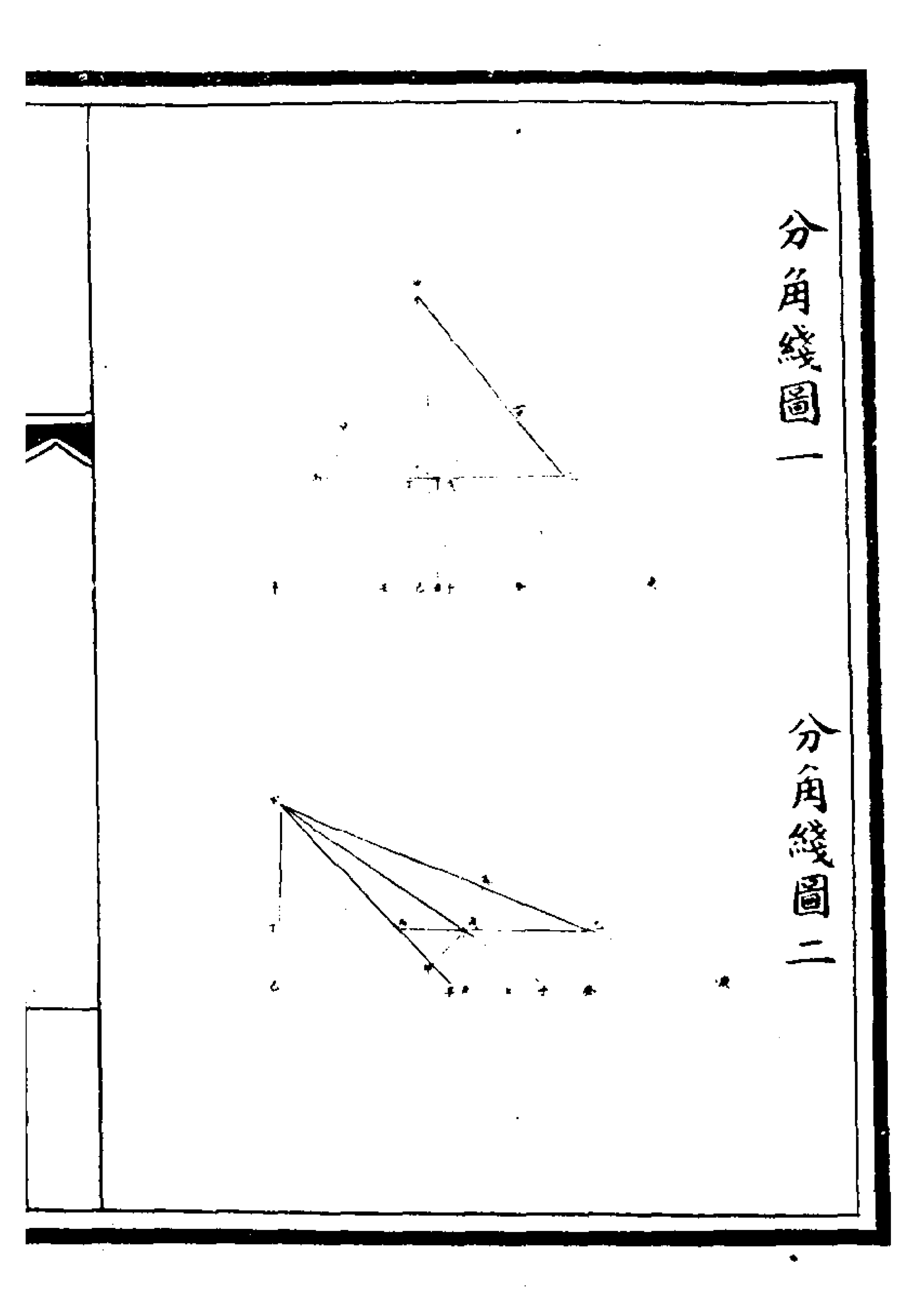
如甲乙丙三角形。銳角形。外切圓心壬在形內。如第二圖鈍角形。外切圓心壬。在形外。如第三圖。壬辛。壬己。壬庚皆為外切圓半徑。求法。先以兩腰甲乙甲丙。底邊乙丙。求得中垂綫甲丁。即作為一率。小腰甲乙為二率。大腰甲丙為三率。求得四率。即外切圓徑。試自甲至對界作甲戊綫。即外切圓徑。又自丙至戊作丙戊綫。則甲丙戊三角形之丙角立於圓界之一半。必為直角。與甲丁所分甲乙丁三角形之丁角等。而戊角與乙角。皆對甲丙弧。其

度又等。故甲丙戊。甲丁乙。為同式三角形。以甲丁與甲乙之比。同於甲丙與甲戊之比。而得外切圜徑。

方邊圖



如圖甲乙丙銳角三角形戊巳庚辛為內容止方形先以兩腰甲乙甲丙底邊乙丙求得中垂綫甲丁乃以底邊乙丙與中垂綫甲丁相加為一率底邊乙丙為二率中垂綫甲丁為三率求得四率即內容方邊戊辛蓋甲乙丙甲戊辛為同式三角形可用為相當比例以甲乙丙形之甲丁乙丙和與乙丙之比同於甲戊辛形之甲壬戊辛和即甲丁與戊辛之比至鈍角形求內容方邊與銳角形同


分角綫圖一
分角綫圖二

如圖甲乙丙三角形。大腰甲乙。小腰甲丙。底邊乙丙。求甲角分角綫甲戊。先按三邊求垂綫法。如第一圖銳角形求得形內垂綫甲丁。第二圖鈍角形求得形外垂綫甲丁。並皆求得大分底乙丁。小分底丙丁。以兩腰相加。即甲乙甲丙和。為一率。垂綫甲丁為二率。大腰小腰底邊三數相加。即甲乙甲丙乙丙和。為三率。求得四率。大垂綫甲己。內減甲丁得丁己。等於戊丑。又以甲丁為一率。甲乙為二率。戊丑為三率。求得四率。戊癸。等於乙戊。以乙丁

減乙戊。餘丁戊。或以甲丁為一率。甲丙為二率。

戊丑為三率。得四率戊壬。等於戊丙。銳角形。以

戊丙內減丙丁。鈍角形。以戊丙加丙丁。皆得丁

戊。乃以丁戊甲丁各自乘。相加。開平方。即得甲

角分角綫甲戊。試自甲戊分角綫戊點作甲乙

甲丙二邊垂綫戊寅戊卯。二綫必等。次自戊點

作乙丙邊垂綫戊丑。令與戊寅或戊卯等。即將

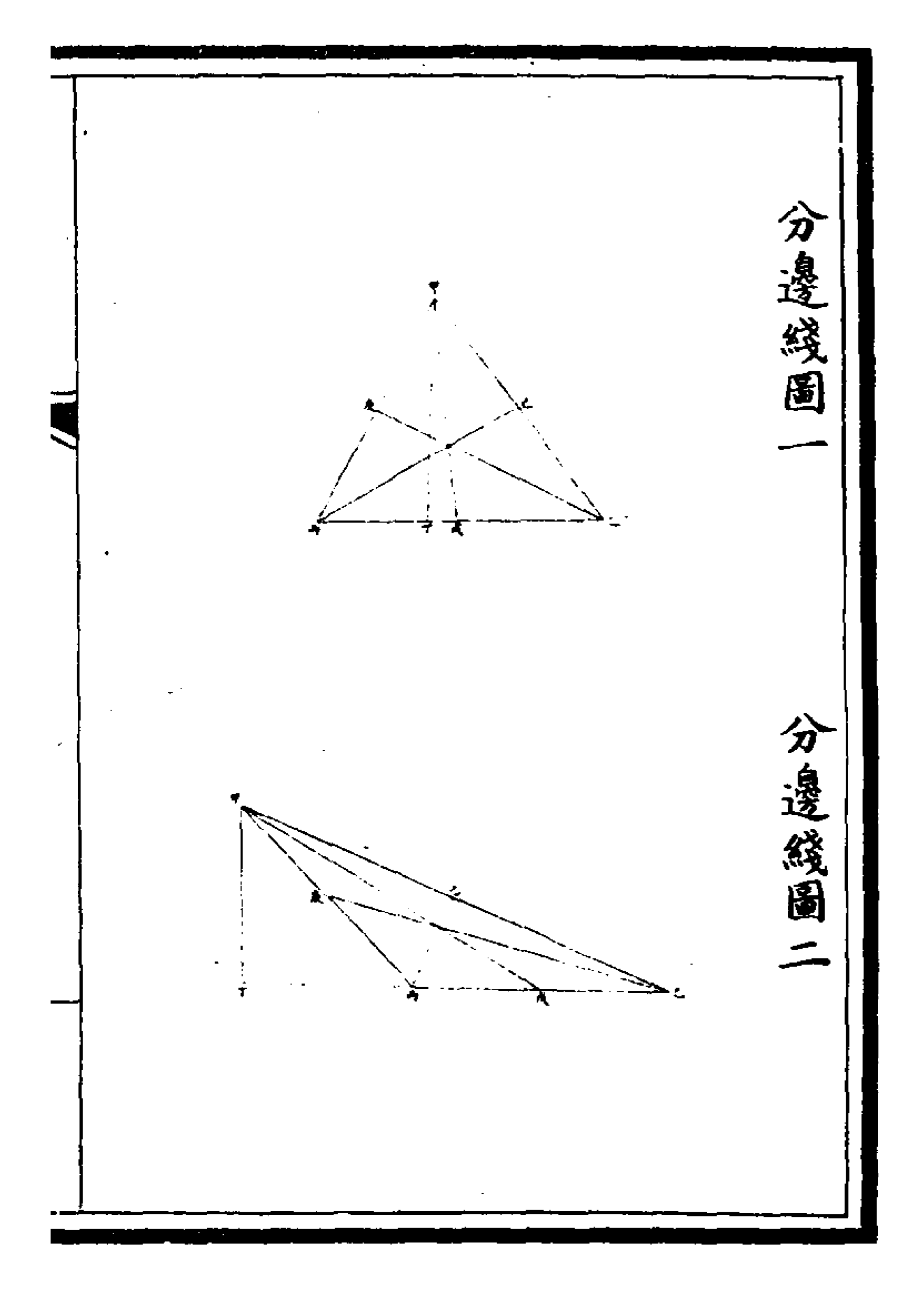
甲乙甲丙各引長至庚至辛。隨作與乙丙邊平

行之辛庚綫。鈍角形。須將乙丙邊引長至丁。庚

辛綫引長至己。成甲庚辛形。並將甲丁引長至

己。甲戊引長至子。乃自戊與甲辛平行作戊壬綫。必等丙戊。與甲庚平行作戊癸綫。必等乙戊。則乙丙底邊。必等戊癸壬形之兩腰和。亦等丙辛乙庚和。而甲乙甲丙乙丙三邊和。必等甲庚辛形之甲庚甲辛兩腰和。用甲乙丙。甲庚辛同式三角形。以甲乙甲丙和。與甲丁之比。同於甲庚甲辛和。即甲乙甲丙乙丙和。與甲己之比。以甲己內減甲丁。餘丁己。必等戊丑。次用戊癸壬。甲乙丙。同式三角形。以甲丁與甲乙之比。同於戊丑與戊癸之比。而戊癸原等乙戊。以乙丁減之。餘丁戊。

或以甲丁與甲丙之比。同於戊丑與戊壬之比。銳角形。以戊壬相等之丙戊內減丙丁。鈍角形以丙戊加丙丁。均得丁戊。用甲丁戊形。以丁戊甲丁為句股。求得弦甲戊。即所求甲角分角綫也。至求乙角丙角之分角綫。法與此同。但以所求分角綫所抵之邊。為底邊。


分邊綫圖一

分邊綫圖二

如圖。甲乙丙三角形。大腰甲乙。小腰甲丙。底邊乙丙。求平分底邊之甲戊綫。先按三邊求垂綫法。如第一圖。鋭角形求得形内垂綫甲丁。第二圖。鈍角形求得形外垂綫甲丁。並皆求得大分底乙丁。小分底丙丁。鋭角形以乙丁内減半底邊乙戊。餘丁戊。或半底邊丙戊内減丙丁。亦餘丁戊。鈍角形以乙丁内減半底邊乙戊。餘丁戊。或半底邊丙戊加丙丁。亦得丁戊。乃以丁戊甲丁各自乘。相加。開平方。得分底邊之綫甲戊也。至求平分甲乙邊之丙

己。及平分甲丙邊之乙庚。法均與此同。但各以

分邊綫所抵之邊。為底邊。

欽定大清會典圖卷一百三十五

天文二十九 算術三

直角形圖

邊較邊和求角圖一

邊較邊和求角圖二

銳角形圖一

銳角形圖二

銳角形圖三

鈍角形圖

三邊求角圖一

三邊求角圖二

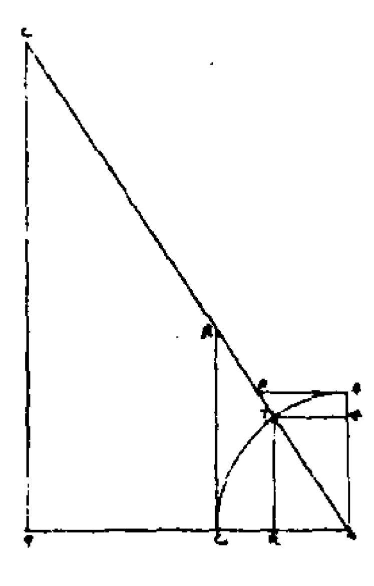
邊較求角圖一

邊較求角圖二

邊和求角圖一

邊和求角圖二

直角形圖



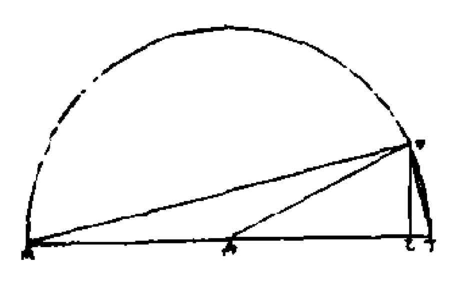
凡三角形邊角相求。皆知其三可求其三。角與邊皆相對。求之之法。必審所知所求對所知對所求。以爲比例。直角形並不必用是法也。凡半徑。皆可作直角正弦用。以角求邊者皆以半徑爲一率。丙甲乙直角三角形。甲爲直角九十度。如知丙角度。乙丙邊。而求乙甲邊。則甲直角正弦即半徑丁丙爲一率。丙角正弦丁戊爲二率。乙丙邊爲三率。得四率。即乙甲邊。若求甲丙邊。則半徑丁丙爲一率。丙角餘弦戊丙爲二率。乙丙邊爲三率。得四率。即甲丙

邊。如知丙角度。乙甲邊。而求乙丙邊。則半徑丙辛為一率。丙角餘割丙壬為二率。乙甲邊為三率。得四率。即乙丙邊。若求甲丙邊。則半徑丙辛為一率。丙角餘切辛壬為二率。乙甲邊為三率。得四率。即甲丙邊。如知丙角度。甲丙邊。而求乙丙邊。則半徑己丙為一率。丙角正割庚丙為二率。甲丙邊為三率。得四率。即乙丙邊。若求乙甲邊。則半徑己丙為一率。丙角正切庚己為二率。甲丙邊為三率。得四率。即乙甲邊。如知乙角度而三邊互求法皆做此。以邊求角者皆以半徑

為三率。如知乙甲邊甲丙邊。而求丙角乙角。則甲丙邊為一率。乙甲邊為二率。半徑己丙為三率。得四率庚己。即丙角正切。乙角餘切。如知乙甲邊乙丙邊。而求丙角乙角。則乙丙邊為一率。乙甲邊為二率。半徑丁丙為三率。得四率丁戊。即丙角正弦。乙角餘弦。如知甲丙邊乙丙邊。而求丙角乙角。則甲丙邊為一率。乙丙邊為二率。半徑乙丙為三率。得四率庚丙。即丙角正割。乙角餘割。皆檢表而得角度。此皆以同式之句股弦為比例也。以角求角者。相減而得。如知丙角。

求乙角。則以丙角度減一象限九十度。餘即乙角。蓋甲角既為直角。則丙乙二角必共為九十度也。故於九十度中減丙角。餘即乙角。如知三邊而不知甲為直角。則以甲丙邊為一率。乙甲乙丙兩邊和為二率。兩邊較為三率。四率仍得甲丙邊。即知甲為直角。此即三角形求分底邊之理。因甲為直角。則乙甲邊即垂綫。無分底。即無分底較。故四率仍得甲丙也。

邊較邊和求角圖一



甲乙丙直角三角形。知甲乙邊及甲丙乙丙兩邊較。求甲角丙角。以甲丙為半徑作戊甲丁半圓。乙丁即甲丙乙丙兩邊較。用甲乙丁形。設以甲乙為半徑。則乙丁為乙甲丁角正切。以甲乙邊為一率。乙丁邊較為二率。半徑為三率。求得四率。乙甲丁角（等乙戊甲角。）正切。檢表得度。倍之。即得乙丙甲角。以減九十度。得乙甲丙角。如知甲乙邊及甲丙乙丙兩邊和。求甲角丙角。則用甲乙戊形。設以甲乙為半徑。則乙戊即乙戊甲角（等乙甲丁角。）餘切。以甲乙邊為一率。乙戊（即甲丙乙丙和。）

邊和為二率。半徑為三率。求得四率。乙戊甲角

餘切。檢表。得乙戊甲角。倍之。得乙丙甲角。以減

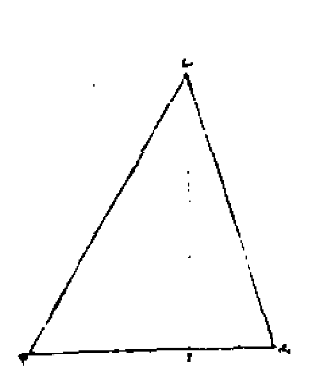
九十度。得乙甲丙角。

邊較邊和求角圖二

甲乙丙直角三角形。知甲乙邊及甲丙乙丙兩邊較乙丁。求甲角乙角。將丙乙邊引長至丁。令丙丁與甲丙等。作甲丁綫。成甲丁乙三角形。用對邊對角法。以甲乙邊為一率。乙丁邊較為二率。丁角正弦（即半直角四十五度正弦）為三率。求得四率。為甲角正弦。檢表得乙甲丁角。為半較角。與丁甲丙角半直角（等丙丁甲角。）相減。得乙甲丙角。相加。得甲乙丙角。如知甲乙邊及甲丙乙丙兩邊和。求甲角乙角。將乙丙邊引長至戊。令丙戊與甲丙等。作甲戊綫。成甲乙戊三角形。用對邊對角法。

以甲乙邊為一率。乙戊邊和為二率。戊角正弦即半直角四十五度正弦。為三率。求得四率。為甲角正弦。檢表。得乙甲丁角為半較角。與丁甲丙角半直角相減。得乙甲丙角。相加。得甲乙丙角。

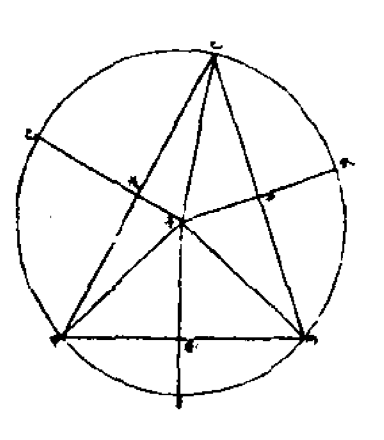
銳角形圖一



一率　丁直角正弦
二率　丙角正弦
三率　乙丙邊
四率　乙丁中垂線

一率　甲角正弦
二率　丁直角正弦
三率　乙丁中垂線
四率　甲乙邊

銳角形圖二



銳角三角形。甲乙丙三角俱銳。邊角相求則審所知所求。以對所知比所知同於以對所求比所求也。如知乙角。丙角。乙丙邊。求甲乙邊。以乙丙二角相併於半周一百八十度內減之。餘即甲角。是為對所知之角。以其正弦為一率。對所求之角丙角正弦為二率。所知乙丙邊為三率。得四率。即甲乙邊。此非直角形正弦與邊似非同式。而比例可通者。蓋暗用中垂綫分為兩直角形。合兩次比例為一次比例也。如第一圖。試作乙丁垂綫。則成乙丁

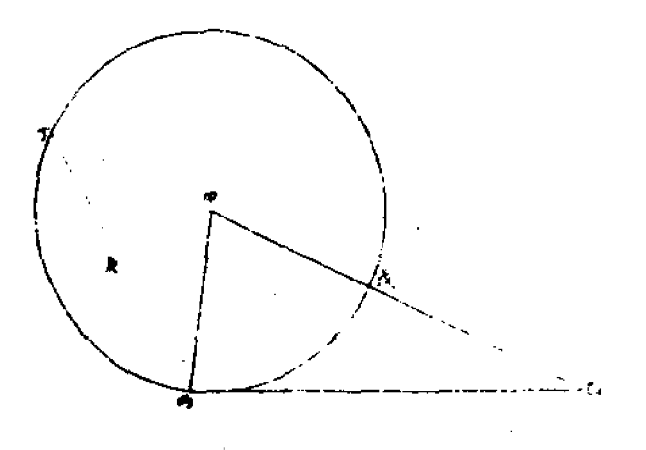
丙。乙丁甲。兩句股形。次第求之。第一次。以丁直角正弦為一率。丙角正弦為二率。乙丙邊為三率。得四率。為乙丁中垂綫。第二次。以甲角正弦為一率。丁直角正弦為二率。乙丁中垂綫為三率。得四率。為甲乙邊。此皆直角形邊角相當之理也。而合兩次用之。一二率內丁直角正弦同。則可省。三四率內乙丁中垂綫同。則可省。是徑以甲角正弦為一率。丙角正弦為二率。乙丙邊為三率。而四率徑得甲乙邊矣。若求甲丙邊。則以對所知甲角正弦為一率。對所求乙角正

弦為二率。所知乙丙邊為三率。得四率甲丙邊。其理同也。又三角正弦與三邊原有相當之理。如第二圖。試切三角作圜周。則每界角各對一弧。自角作甲子乙子丙子三綫會於圜心子。自心子作子癸子辛子己各垂綫。將每角所對弧平分一半。各成兩心角。每一心角與相當各界角之度等。則乙壬為乙子壬角正弦。丙壬為丙子壬角正弦。皆即為甲角正弦。丙庚為丙子庚角正弦。甲庚為甲子庚角正弦。皆即為乙角正弦。甲戊為甲子戊角正弦。乙戊為乙子戊角正

弦。皆即為丙角正弦。以正弦比正弦。是以半邊比半邊。即同於以全邊比全邊而為相當比例也。如知乙角。甲乙邊。甲丙邊。求丙角乙丙邊。則先求丙角。以對所知甲丙邊為一率。對所求甲乙邊為二率。所知乙角正弦為三率。得四率。即丙角正弦。檢表得丙角度。以減半周。餘為甲角度。次求乙丙邊。以對所知乙角正弦為一率。對所求甲角正弦為二率。所知甲丙邊為三率。得四率。即乙丙邊。凡有邊角相對者。皆以是法求之。凡角求邊。而一率用正弦。非直角之正弦即

半徑者皆可以其角之餘割代之。以與二率相乘以為二率。而仍以半徑為一率。是即八綫代用易除為乘之法。若一率為餘弦或切綫割綫亦可以代用之綫易入二率。而以半徑為一率。

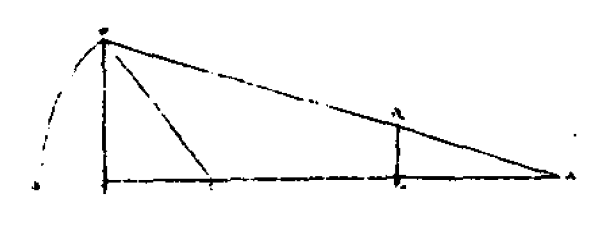
銳角形圖三



如甲乙丙鋭角形。如甲角。甲乙邊。甲丙邊。求乙角丙角。此所知之角。在所知兩邊之閒。角無所對之邊。邊無所對之角者。則用切綫分外角法。以甲乙甲丙兩邊和為一率。兩邊較為二率。甲角減半周一百八十度。餘為甲外角。半之為半外角。以其正切為三率。得四率。為半較角正切。檢表。得度。以減半外角。餘乙角。若以加半外角。得丙角。甲乙甲丙兩邊和如丁乙。兩邊較如戊乙。甲外角如丁甲丙角。半外角如丁甲庚角。與甲乙辛角等。甲戊丙及甲

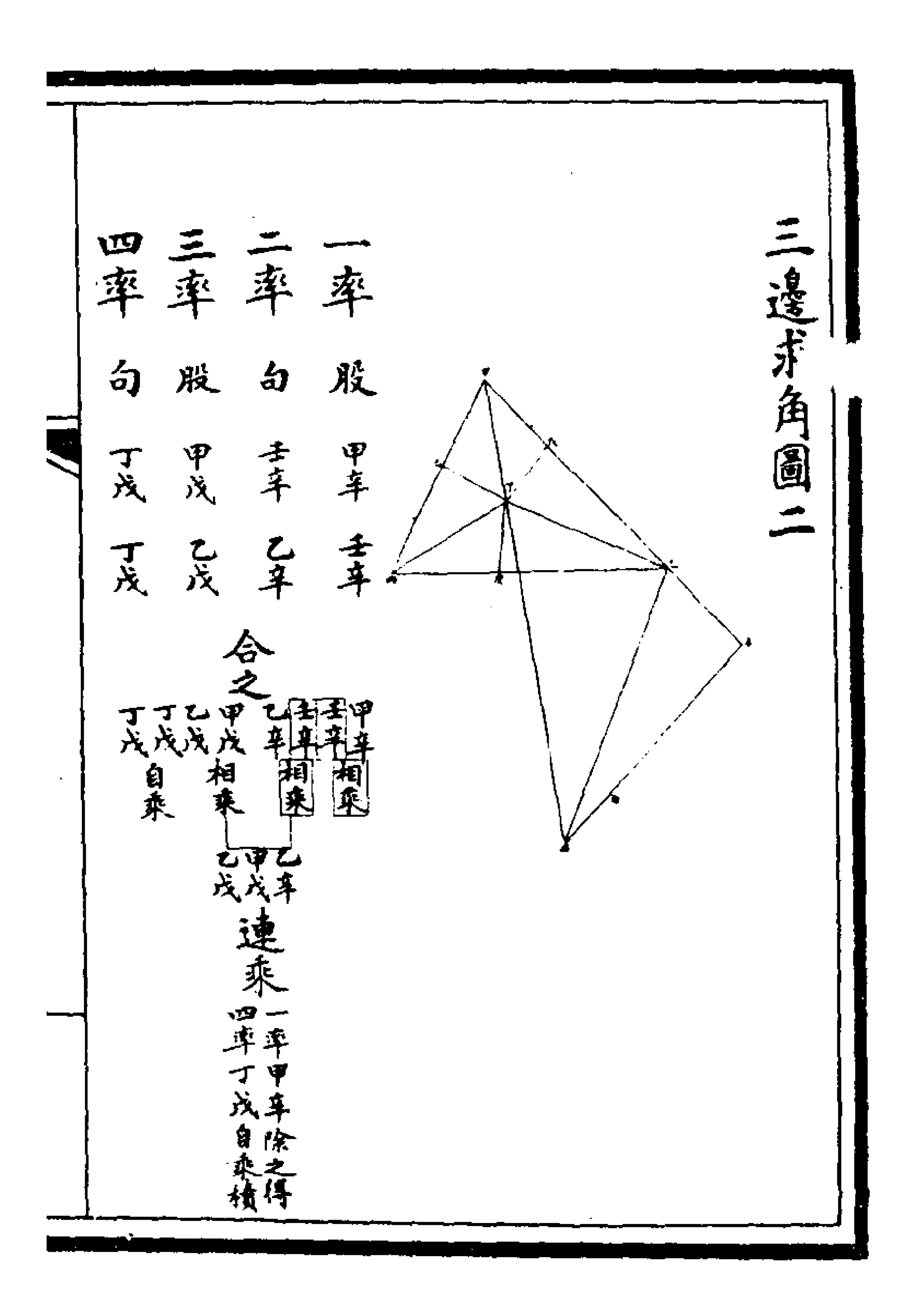
丙戊二角。為乙丙二角相和折半之度。皆與半外角等。其正切如丁辛。半半較角如戊丙乙角與丙乙辛角等。其正切為丙辛。兩邊和丁乙比兩邊較戊乙。同於半外角正切丁辛。比半較角正切丙辛也。既得半較角丙乙辛角。於甲乙辛半外角內減之。則餘甲乙丙角。以半較角戊丙乙角。加甲丙戊半外角。則成甲丙乙角。

鈍角形圖



鈍用三角形。一角鈍。餘二角俱銳。如甲乙丙形。邊角相求。以對所知比所知。以對所求比所求。皆與銳角形同法。鈍角八綫。即係外角八綫。（以鈍角度減半周一百八十度。餘為外角度。其八綫與鈍角同用。）而比例可通者。試就乙丙二角言之。如知乙鈍角丙銳角。甲丙邊。而求甲乙邊。則乙鈍角外角為甲乙庚角。其正弦即鈍角外垂綫。為甲丁。若依甲乙邊截甲丙邊於戊。則戊丙即甲乙。而戊己為丙角正弦。一率對所知乙角正弦甲丁。二率對所求丙角正弦戊己。三率所知甲丙邊。

甲丙邊。二率對所求甲乙邊。三率所知乙角正弦。得四率為所求丙角正弦。檢表得丙角。以與乙角相併。減半周。餘即甲角。


三邊求角圖二
一率 股 甲辛 壬辛
二率 句 壬辛 乙辛
三率 股 甲戊 乙戊
四率 句 丁戊 丁戊
合之
甲辛壬辛相乘
壬辛乙辛相乘
乙辛甲戊相乘
乙戊丁戊丁戊自乘
乙辛甲戊乙戊連乘
一率甲辛除之得四率丁戊自乘積

三邊求角又法。先求中心至邊之垂線而後求角。法以三邊相併為邊總。半之為半總。以三邊各減之。得三較。三較連乘。半總除之為垂線自乘積。開平方。得垂線。此分三角形為六句股形。而合兩次比例為一次比例也。如甲乙丙三角形。自中心丁至每角作丁甲丁乙丁丙三線。勻分一角為二角。又自中心丁至每邊作丁戊丁庚丁己三垂線。分每邊為大小段。而皆與垂線成直角。則為六句股形兩兩相等。三垂線皆為其句相等也。甲戊與甲

乙等乙戊與乙庚等丙庚與丙己等皆為垂綫

句之股合六股為邊總半總為三股如甲戊戊

乙丙庚引甲乙至辛使乙辛與丙庚等則甲辛

即半總以三邊減之甲戊為丙乙邊即戊辛之較

戊乙為甲丙邊即甲戊及乙辛之較乙辛即丙庚為甲乙

邊之較半總即三較共數也試引甲丁綫至壬

與丁戊平行作壬辛綫又作乙壬綫則甲辛壬

為直角丁乙壬亦直角壬辛甲與丁戊甲為同

式句股乙辛壬與丁戊乙為同式句股以甲辛

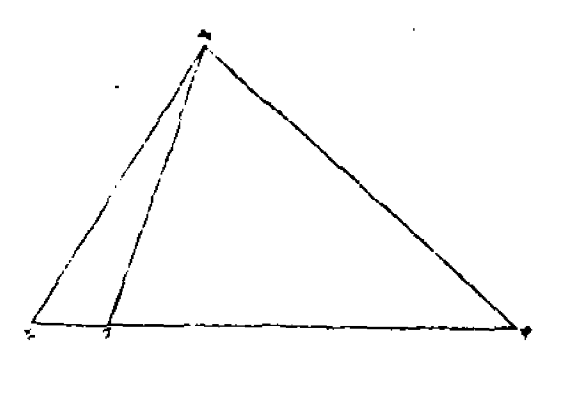
股比壬辛句同於甲戊股比丁戊句為第一次

比例也以壬辛股比乙辛句同於乙戊股比丁戊句為第二次比例也合而用之兩一率甲辛壬辛相乘為一率兩二率壬辛乙辛相乘為二率兩三率甲戊乙戊相乘為三率兩四率丁戊丁戊相乘即自乘為四率是為面與面比也而一二率内壬辛數同則省之徑以甲辛為一率乙辛為二率甲戊乙戊相乘為三率則得四率丁戊自乘積也兩三率既以甲戊較乙戊較相乘又以二率乙辛較乘之是三較連乘也一率甲辛半總除之所得四率為丁戊垂綫自乘積

故開平方得垂綫也既得垂綫則任求一角以其對邊與半總之較為一率垂綫為二率半徑為三率得四率為所求角之半角正切葢角之對邊與半總之較即其角旁為垂綫所截之股如求丙角則其對邊甲乙與半總甲辛之較為乙辛乙辛即丙庚也丙庚股若半徑丁庚句即垂綫若半角之正切故以對邊之較丙庚比半徑同於垂綫丁庚之比正切檢表得度為丙半角丁丙庚角度倍之得丙角如法再求一角既得二角則相併以減半周餘即又一角若知三

角度而不知三邊數則無實數可據其形可大
可小不可求也

邊較求角圖一



甲乙丙三角形。知甲角。乙丙邊。甲乙甲丙兩邊

較乙丁。求乙角丙角。則依甲丙邊截甲乙邊於

丁。作丙丁線。成乙丁丙鈍角形。以甲角減半周。

餘半之。為丁鈍角之外角。乃求丙分角。以對所

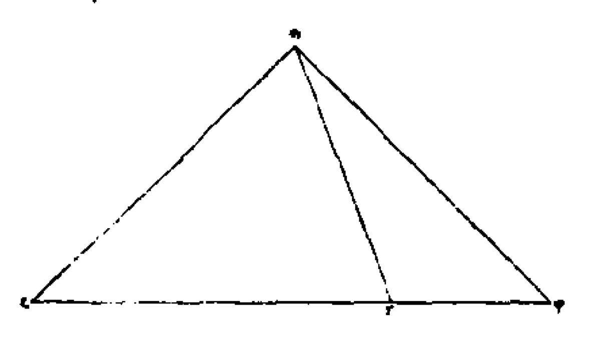
知乙丙邊為一率。對所求乙丁邊較為二率。所

知丁鈍角正弦為三率。得四率。為丙分角正弦。

檢表。得度。以加丁外角。為丙角。若以減丁外角。

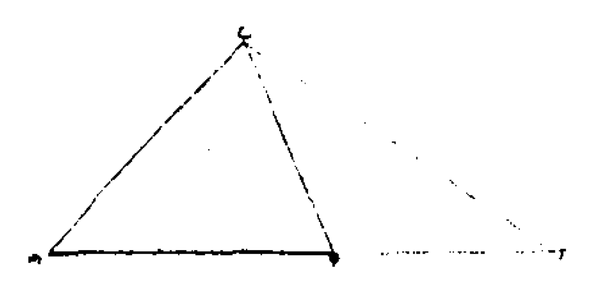
餘乙角。

邊較求角圖二



如知甲角。甲丙邊。甲乙丙乙兩邊較甲丁。求乙角丙角。則依丙乙邊截甲乙邊於丁。作丙丁線。成甲丁丙鈍角形。此形所知甲角。在所知甲丙甲丁兩邊之間也。用切線分外角法。以甲丙甲丁兩邊和為一率。甲丙甲丁兩邊較為二率。甲角半外角之正切為三率。得四率為半較角正切。檢表得度。以減半外角。餘為丙分角。倍之。以加甲角。即丙角。乙丙丁角乙丁丙角皆為甲丙二角相和折半之度。丙分角其半較也。故倍而加之。併甲丙二角。以減半周。餘乙角。

邊和求角圖一



甲乙丙三角形。知甲角。乙丙邊。甲乙甲丙兩邊和。求丙角乙角。則引甲丙邊至丁。使甲丁與乙甲等。丙丁即兩邊和。作乙丁綫。成丁乙丙三角形。甲角為丁甲乙鈍角之外角。半之即丁角。求丙乙丁角。以對所知乙丙邊為一率。對所求兩邊和丙丁為二率。所知丁角正弦為三率。得四率。為丙乙丁角正弦。檢表得度。內減半甲角。即等丁角之甲乙丁角。餘即乙角。併甲乙二角減半周餘即丙角

邊和求角圖二

如知丙角爲乙邊甲丙甲乙兩邊和。求甲角乙角。則引丙甲邊至丁。使甲丁與甲乙等。丙丁即兩邊和。作乙丁綫。成丁丙乙三角形。此形所知丙角在所知乙丙丙丁兩邊之閒。用切綫分外角法。以乙丙丙丁兩邊和為一率。兩邊較為二率。丙角半外角之正切為三率。得四率為半較角正切。檢表得度。以減半外角餘為丁角。倍之即甲角。併甲丙二角減半周餘即乙角。